შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 395

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+\dots+\frac{1}{2012\sqrt[3]{2011}}<3 \iff \frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3\cdot 2}+\frac{1}{4^3\cdot 3}+\frac{1}{5^3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{2012^3\cdot 2011}<27$$

თუ ჩვენ უტოლობის მარცხენა მხარეს ჩვენ, ... გავადიდებთ და უტოლობა თუ ჭეშმარიტი შეიქმნა მაშინ მოცემული უტოლობაც ჭეშმარიტი იქნება. წილადი გაიზრდება თუ მის მნიშვნელს შევამცირებთ. $\frac{1}{(2k+1)^3}<\frac{1}{(2k)^3}$ $k\in N$. ამიტომ ყველა მნიშვნელში სადაც ... კენტი რიცხვის ხარისხია 3 მას შევცვლით მის უკან მდგომი ლუწი რიცხვის ხარისხით 3-ით იქნება. ხოლო $\frac{1}{(2k)^n\cdot(2t+1)}<\frac{1}{(2k)^n}$ $t,k\in N$. ამიტომ ჩვენ ლუწ ... შემდეგ მარცხენა მხარე უტოლობის იქნება ასეთი:

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\dots+\frac{1}{2010^3}+\frac{1}{2010^4}+\frac{1}{2012^3}$$

$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2012^3}<1$ რადგან თითოეული წილადი $\frac{1}{3}$-ზე ნაკლებია.

თუ დავამტკიცებთ რომ $\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^4}+\dots+\frac{1}{2010^3}+\frac{1}{2010^4}<26$ დავამტკიცებთ. აქ სულ ლუწი წევრებია ამიტომ დავაწყვილოთ შემდეგნაირად: $\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}$; $\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^4}$ ... ამ ... ყველაზე დიდ მნიშვნელობას ღებულობს $\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}=$ [illegible] $=\frac{5}{4^3}<1$

შემდეგ $\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^4}=\frac{7}{6^3}<1$.

თუ დავამტკიცებთ რომ $\frac{1}{8^3}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\dots+\frac{1}{2010^3}+\frac{1}{2010^4}<24$. ... დაწყვილების ... მიმდევრობა იქნება $\frac{1}{8^3}+\frac{1}{8^4}=\frac{9}{8^3}$ ხოლო ყველა ... რომ ... ჯამი იქნება $\frac{9}{8^3}\cdot 998<20$ ამიტომ დავამტკიცეთ უტოლობა ჭეშმარიტია. რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

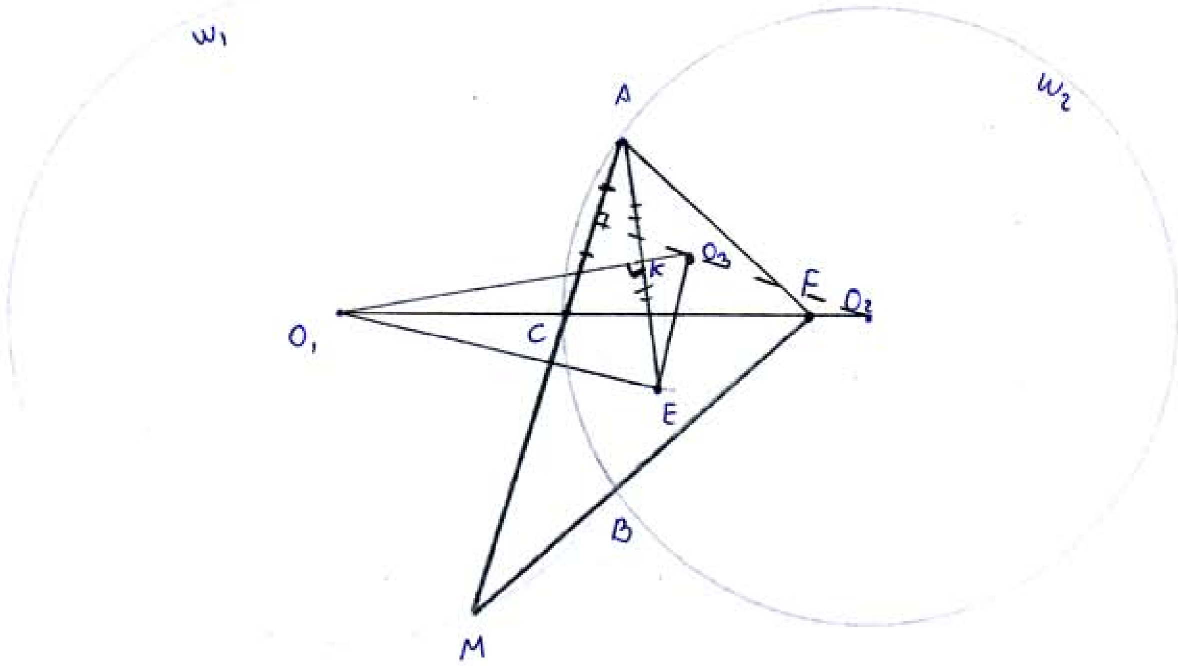
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 395

ამოცანა № 2

გვერდი № 1.



დავუშვათ $\triangle CAF$-ზე შემოხაზული $\overset{w_3}{\vee}$ წრე-ს ცენტრი არის O_3
AC w_2 და w_3-ის საერთო ქორდა ამიტომ O_2-დან დაშვებული მართობი
O_3-ზე გავლის და AC-ს შუაზე გაივლის. w_3-ის და w_1-ის საერთო ქორდა
AE ამიტომ ეკვივალენტურად მართობი ქვეშ იქნება. თუ დავამტკიცებთ რომ
$O_1E^2 = O_1C \cdot O_1F$ მაშინ O_1E მხებლი გამოვა ჩვენ.
w_3-ის რადიუსი აღვნიშნოთ r-ით w_1-ის R-ით. (კოსინუსთა O_3E
$O_1O_3^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha$.) $\angle O_1EO_3 = \alpha$. მაშინ
მსგავსი $\triangle EBO_1$-ის თუ დავამტკიცებთ რომ $\frac{O_3k}{r} = \frac{r}{O_1O_3}$ მაშინ $\triangle kO_3E$ მსგავსი
და $\angle O_3EO_1$ მსგავსი არის ანუ O_1E ჩვენ
$\frac{O_3k}{r} = \frac{r}{O_1O_3} \Leftrightarrow r^2 = O_1O_3 \cdot O_3k.$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 395

ამოცანა № 3

გვერდი № 1.

ლემა №1: ნებისმიერი $x;y\in N$ რიცხვებისათვის $f(x)-f(y) \vdots x-y$.
ეს ხდება იმიტომ რომ გამოსახულების თავისუფალი წევრები ბათილდე-ბა ხოლო ნებისმიერი სხვა სახის მიუჭორწევში $a_k\cdot x^n-a_k\cdot y^n=a_k(x^n-y^n)=$
$=a_k(x-y)(x^{n-1}+\dots+y^{n-1}) \vdots x-y$. დავუშვათ რომ არსებობს ასეთი ფუნქცია.
დავუშვათ რომ $f(0)=a$ ხოლო $f(a)=b$ მაშინ $f(f(0))=f(a)=b$.
და $f(f(0))=2011$ ანუ $b=2011$ $f(0)=a$; $f(a)=2011$.
თუ $a=0$ მაშინ მივიღეთ $f(0)=0$ $f(0)=2011$ რაც შეუძლებელია
ანუ $a\neq 0$. თუ $a\neq 0$ მაშინ ლემა №1-ით. $f(a)-f(0)\vdots a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2011-a\vdots a \Leftrightarrow 2011\vdots a$. ვინაიდან $a\neq 0$ და ამიტომ $a\in N$ ხოლო
ასეთი a მხოლოდ 2-ია რადგან 2011 მარტივია. $a=1$ და $a=2011$.
თუ $a=1$ მაშინ $f(0)=1$ $f(1)=2011$. $f(f(1))=f(2011)$
$f(f(1))=2012$. ანუ $f(2011)=2012$.
ლემა №1-ის თანახმად. $f(2011)-f(1)\vdots 2010$. $2012-2011\vdots 2010$.
$1\vdots 2010$ ამიტომ $a\neq 1$.
თუ $a=2011$ მაშინ.
$f(0)=2011$ $f(2011)=2011$. მაშინ $f(f(2011))=f(2011)$.
ხოლო $f(f(2011))=4022$. გამოდის $f(2011)=4022$ რაც
მივიღეთ გვქონდა $f(2011)=2011$ ანუ $a\neq 2011$. და გამოვიდა
ჩვენი დაშვება მცდარია. ე.ი. ასეთი ფუნქცია არ არსებობს.